PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA *COMPLETE GRAPH* K_n DENGAN *N* GENAP

Novi Irawati, Robertus Heri
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang

ABSTRACT

Let G be a graph with vertex set $V = V(G)$ *and edge set* $E = E(G)$ *and let* $e = |E(G)|$ *and* $v = |V(G)|$. *A vertex-magic total labeling of a graph* $G(V, E)$ *is a bijection map* λ from $V \cup E$ to the integers $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ *such that there exists a positive integer* k *satisfying* $\lambda(x) + \sum \lambda(xy) = k$, for every $x \in V$. Then k is called a magic constant and G is called *vertex-magic total graph. In [5] have discussed vertex-magic labeling of complete graph* K_n *for odd, now in this article, we consider a vertex-magic labeling of complete graph* K_n *for even with use an algorithm which is composed of a modified construction magic square algorithm.*

Keywords : *vertex-magic total labeling, Complete graph* K_n, magic square

1. PENDAHULUAN

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Ada banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan gracefull, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan juga desain circuit gabungan pada komponen elektronik. Untuk mengantisipasi kedatangan peluru kendali dari pasukan musuh dalam perang dunia modern, peluru kendali ini dapat di deteksi dengan menggunakan pendeteksi sinyal radar, sehingga dapat dilakukan antisipasi secepat mungkin. Desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali ini ekuivalen dengan pelabelan pada *complete graph*, dimana setiap titik yang ada dihubungkan dengan satu sisi yang mempunyai label yang selalu berbeda. Label sisi ini menggambarkan jarak antar titik, sedangkan label titiknya merupakan posisi pada saat sinyal dikirimkan.

Pada artikel ini, penulis melakukan kajian pelabelan total titik ajaib (*vertex magic total labeling*) pada salah satu subkelas graf reguler yaitu *complete graph* K_n , dimana salah satu aplikasinya digunakan dalam desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali.

2. MASALAH

Permasalahan yang akan dibahas dalam artikel ini adalah bagaimana memberikan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_n, untuk n genap, dengan dasar pelabelan pada *complete graph* K_n, dan pelabelan *bipartite compete graph* $K_{n,n}$.

 ISBN 979-26-0255-0

3. PEMBAHASAN

Untuk menyusun sebuah pelabelan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_m dimana m genap digunakan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_n dimana n ganjil. Untuk menyusun pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_m dimana m genap, dibagi menjadi tiga kasus yaitu dimana $m \equiv 2 \; mod \; 4$, $m \equiv 4 \; mod \; 8$ dan $m \equiv 0 \; mod \; 8$. Namun dalam artikel ini hanya akan dibahas untuk $m \equiv 2 \; mod \; 4$ dan $m \equiv 4 \; mod \; 8$ saja.

3.1 Pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_m , $m \equiv 2 \; mod \; 4$

Teorema 3.3 :
Terdapat pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_m dengan m genap untuk semua $m \equiv 2 \; mod \; 4$, dengan $m > 2$

Bukti:
Untuk mempermudah misalkan $n = m/2$. Cara pemberian labelnya menggunakan persegi ajaib orde n dan pelabelan total titik ajaib *complete graph* k_n yang telah dibahas sebelumnya.
Ide pokok dalam pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_m untuk semua $m \equiv 2 \; mod \; 4$, untuk $m > 2$ adalah dengan menggunakan twin faktoriasi, yaitu dengan melihat bahwa *complete graph* K_m ini merupakan perpaduan dari dua *complete graph* n dan *bipartite complete graph* n, $K_m = K_n \cup K_n \cup K_{n,n}$. Dalam pelabelan *complete graph* K_m digunakan barisan angka mulai dari 1 sampai $n + \frac{n(n-1)}{2}$.

Untuk sampai ke pelabelan graf, maka angka-angka tersebut di bagi dalam lima himpunan disjoint sebagai berikut,

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^{\frac{(n-1)}{2}} \{(2i+1)n+1, (2i+1)n+2, \dots, (2i+2)n\} \cup \{1,2,\dots,n\}$$
$$S_2 = \bigcup_{i=2}^{\frac{(n-1)}{2}} \{2in+1, 2in+2, \dots, (2i+1)n\} \cup \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$$
$$S_3 = \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$$
$$S_4 = \{n^2+n+1, n^2+n+2, \dots, n^2+2n\}$$
$$S_5 = \{n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+n\} \cup \{n^2+2n+1, n^2+2n+2, \dots, 2n^2+n\}$$

Barisan S_1, S_4 dan S_2, S_3 berturut turut digunakan untuk membentuk label L_1 dan L_2. Elemen S_1 dan S_4 di gunakan untuk pelabelan L_1, dimana elemen S_1 untuk pelabelan sisi dan elemen S_4 untuk pelabelan titik. Sedangkan elemen S_2 dan S_3 di gunakan untuk pelabelan L_2 untuk K_n yang lainnya, dimana elemen S_2 untuk pelabelan sisi dan elemen S_3 untuk pelabelan titik. Barisan S_5 digunakan untuk membentuk label sisi *bipartite complete graph* $K_{n,n}$. □

Untuk lebih jelasnya diberikan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Misalkan $n = m/2$ dengan n adalah bilangan ganjil, cari pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_n dengan n ganjil yang selanjutnya dinotasikan dengan L dan persegi ajaib dengan orde n yang dinotasikan dengan P.
2. Ganti elemen sisi dan titik pada L berturut turut dengan S_1 dan S_4 sehingga menghasilkan L_1 yang merupakan pelabelan untuk K_n.
3. Ganti elemen sisi dan titik pada L berturut turut dengan S_2 dan S_3 sehingga menghasilkan L_2 yang merupakan pelabelan untuk K_n yang lainnya.

4. Ganti elemen elemen pada persegi ajaib ber-orde n dengan S_5 sehingga menghasilkan P_1 yang merupakan pelabelan untuk sisi *bipartite complete graph* $K_{n,n}$.
5. Lakukan transpose terhadap P_1 sehingga menghasilkan P_2 .
6. Susun elemen L_1, L_2, P_1 dan P_2 sebagai berikut $\begin{bmatrix} \mathrm{L}_1 & \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{P}_1 & P_2 \end{bmatrix}$ yang merupakan pelabelan pada graf K_m, dimana $m \equiv 2 \ mod\ 4$.

Dalam kasus ini pelabelan graf disebut sebagai pelabelan total titik ajaib jika nilai konstanta ajaibnya adalah $\frac{8n^3+6n^2-2n}{4}$

Bukti:

Untuk membuat pelabelan *complete graph* K_m dengan *m* adalah bilangan genap yang mana $n = {}^{m}/_{2}$ pada dasarnya adalah menggunakan persegi ajaib orde n dan pelabelan *complete graph* K_n dengan n adalah bilangan ganjil. Dengan demikian maka perhitungan konstanta ajaibnya pun berdasarkan perhitungan konstanta ajaib dari persegi ajaib orde n dan pelabelan *complete graph* K_n dengan n adalah bilangan ganjil.

Dari hasil sebelumnya telah diketahui bahwa konsatanta ajaib K_n adalah $k = \frac{n^3+3n}{4}$, dan konstanta ajaib dari persegi ajaib adalah

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n(n^2-1)$$

Sedangkan pelabelan total titik ajaib pada kasus ini memiliki susunan $\begin{bmatrix} \mathrm{L}_1 & \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$, maka konstanta ajaibnya adalah jumlah dari konstanta ajaib L_1 dan P_1 atau L_2 dan $\mathrm{P}_1^{\mathrm{T}}$. sedemikian sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k &= 3\left(\frac{1}{2}n(n^2-1)\right) + (n-2)n + 2\left(\frac{n^3+3n}{4}\right) + \frac{(n-3)n}{2} \\ &= \frac{3n^3+3n}{2} + (n^2-2n) + \frac{2n^3+6n}{4} + \frac{n^2-3n}{2} \\ &= \frac{6n^3+6n+4n^2-8n+2n^3+6n+2n^2-6n}{4} \\ &= \frac{8n^3+6n^2-2n}{4} \qquad \square \end{aligned}$$

Contoh :

Sebagai ilustrasi diberikan cara pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_6. Misalkan $n = m/2$,maka n adalah bilangan ganjil 3. Dari contoh sebelumnya diketahui pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_3 sebagai berikut

1	4	3	2
2	3	5	1
3	2	1	6
i/j	*1*	*2*	*3*

Gambar 1 Tabel penyusunan pelabelan total titik ajaib $\boldsymbol{K_3}$

Dengan memindahkan elemen diagonal ke baris pertama ,maka diperoleh tabel L sebagai berikut,

Label titik	4	5	6
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 2 Tabel pelabelan total titik ajaib *complete graph* $\boldsymbol{K_3}$

Persegi ajaib P dengan orde 3 dengan menggunakan metode 4 diketahui sebagai berikut,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gambar 3 Persegi ajaib orde 3

Dari L, L_1 dibentuk dengan menggunakan S_1 dan S_4 pada tabel L, dengan $S_1 = \{1,2,3\}$ dan $S_4 = \{13,14,15\}$. Di dapatkan tabel L_1 dibawah

Label titik	13	14	15
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 4 Tabel L_1

Serupa dengan L_1, L_2 dibentuk dengan menggunakan S_2 dan S_3 pada tabel L, dengan $S_2 = \{4,5,6\}$ dan $S_3 = \{7,8,9\}$. Di dapatkan tabel L_2 dibawah

Label titik	7	8	9
Label sisi	6	6	5
	5	4	4

Gambar 5 Tabel L_2

Dengan P persegi ajaib orde 3 diatas dan diketahui $S_5 = \{10,11,12,16,17,18,19,20,21\}$ akan dibentuk label P_1 dan P_2 . Label P_1 dibentuk dengan mengganti elemen tabel P dengan S_5 dengan dasar algoritma pembentukan persegi ajaib ordo 3 dan P_2 merupakan transpose tabel P_1.

16	21	11
12	17	19
20	10	18

16	12	20
21	17	10
11	19	18

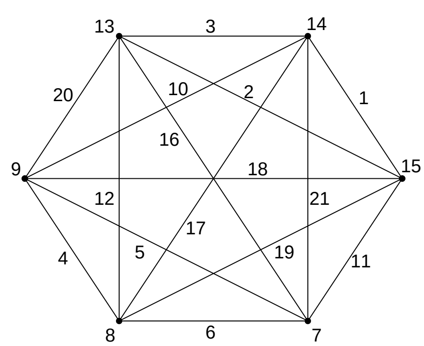
Gambar 6 Tabel P_1 dan P_2

Dari table L_1, L_2, P_1 dan P_2 diperoleh tabel pelabelan total titik ajaib graf *complete* K_6 .

13	14	15	7	8	9
3	3	2	6	6	5
2	1	1	5	4	4
16	21	11	16	12	20
12	17	19	21	17	10
20	10	18	11	19	18

Gambar 7 Tabel pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_6

Penggambaran pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_6 diberikan pada gambar dibawah ini.



Gambar 8 Pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_6

3.2 Pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_m, m \equiv 4 \bmod 8$

Theorema 3.4 :
Terdapat pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_m, untuk semua $m \equiv 4 \bmod 8$, dengan $m > 8$

Bukti:
Dalam konstruksi pelabelan total titik ajaib untuk K_m untuk $m \equiv 4 \bmod 8$ menggunakan persegi ajaib orde $m/4$. Misalkan $n = m/4$. Cara pelabelannya menggunakan persegi ajaib orde n dan pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_n yang telah dibahas sebelumnya.
Ide pokok dalam konstruksi pelabelan total titik ajaib dari K_m, $m \equiv 4 \bmod 8$ adalah dengan merepresentasikan *complete graph* K_m sebagai perpaduan dari empat *complete graph* n, *bipartite complete graph* n dan *bipartite complete graph* $2n$, $K_m = K_n \cup K_n \cup K_n \cup K_n \cup K_{n,n} \cup K_{n,n} \cup K_{2n,2n}$. Hal ini diperlukan untuk memetakan titik dan sisi dalam graf yang lebih kecil kedalam barisan angka 1 sampai $n + \frac{n(n-1)}{2}$. Yang selanjutnya dilakukan partisi integer 1 sampai $n + \frac{n(n-1)}{2}$ kedalam 11 himpunan disjoint S_1 sampai S_{11} sebagai berikut.

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^{\frac{(n-1)}{2}} \{(2i+1)n+1, (2i+1)n+2, \dots, (2i+2)n\} \cup \{1,2,\dots,n\}$$
$$S_2 = \bigcup_{i=2}^{\frac{(n-1)}{2}} \{2in+1, 2in+2, \dots, (2i+1)n\} \cup \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$$
$$S_3 = \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$$
$$S_4 = \{n^2+n+1, n^2+n+2, \dots, n^2+2n\}$$
$$S_5 = \{n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+n\} \cup \{n^2+2n+1, n^2+2n+2, \dots, 2n^2+n\}$$

Untuk himpunana S_6, S_7, S_8, S_9, dan S_{10} didapatkan dengan menambahkan $2n^2 + n$ dalam setiap elemen dalam S_1 sampai S_5. Selanjutnya, $S_{11} = \{4n^2+2n+1, 4n^2+2n+2, \dots, 8n^2+2n\}$ yang akan menghasilkan $4n^2$ elemen.
Elemen S_1 dan S_4 di gunakan untuk pelabelan L_1 untuk K_n , dimana elemen S_1 untuk pelabelan sisi dan elemen S_4 untuk pelabelan titik. Demikian halnya dengan K_n yang lain, yaitu elemen S_2 untuk pelabelan sisi dan elemen S_3 untuk pelabelan titik. Untuk K_n yang ke-tiga, digunakan elemen S_6 untuk pelabelan sisi dan elemen S_8 untuk pelabelan titik. Dengan cara yang sama, untuk K_n yang ke-empat, di gunakan elemen S_7 untuk pelabelan sisi dan elemen S_9 untuk pelabelan titik.
Untuk pelabelan sisi antara titik dalam K_n pertama dan ke-dua digunakan elemen dari S_5. Dengan cara yang sama, elemen dari S_{10} digunakan untuk pelabelan sisi dalam K_n ke-tiga dan ke-empat. Sedangkan S_{11} digunakan untuk melabeli sisi antara dari K_n yang pertama, ke-dua, ke-tiga dan ke-empat. □

Untuk lebih jelasnya diberikan langkah langkah sebagai berikut.

1. Misalkan $n = m/4$ maka n adalah bilangan ganjil, cari pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_n dengan n ganjil yang dinotasikan dengan L dan persegi ajaib dengan orde n yang dinotasikan dengan P.
2. Ganti elemen sisi dan titik pada L berturut turut dengan
   a. S_1 dan S_4, dengan elemen S_1 untuk pelabelan sisi dan elemen S_4 untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan L_1 untuk K_n yang pertama.
   b. S_2 dan S_3, dengan elemen S_2 untuk pelabelan sisi dan elemen S_3 untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan L_2 untuk K_n yang kedua.

   c. S_6 dan S_9, dengan elemen S_6 untuk pelabelan sisi dan elemen S_9 untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan L_3 untuk K_n yang ke-tiga.
   d. S_7 *d*an S_8, dengan elemen S_7 untuk pelabelan sisi dan elemen S_8 untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan L_4 untuk K_n yang ke-empat.
3. Ganti elemen elemen pada persegi ajaib ber-orde n dengan S_5 sehingga menghasilkan P_1 yang merupakan pelabelan untuk sisi graf *bipartite complete* $K_{n,n}$. Dengan cara yang sama, ganti elemen elemen pada persegi ajaib ber-orde n dengan S_{10} sehingga menghasilkan P_2 yang juga merupakan pelabelan untuk sisi graf *bipartite complete* $K_{n,n}$.
4. Lakukan transpose terhadap P_1 dan P_3 sehingga menghasilkan P_2 dan P_4.
5. Dengan membagi S_{11} menjadi 4 bagian, ganti elemen persegi ajaib orde n dengan elemen-elemen yang ada dalam S_{11} dan lakukan transpose terhadap hasil yang diperoleh, yaitu sebagai berikut.
   a. Bagian pertama S_{11} mengasilkan M_1 dan M_1^T
   b. Bagian kedua S_{11} mengasilkan M_2 dan M_2^T.
   c. Bagian ketiga S_{11} mengasilkan M_3 dan M_3^T.
   d. Bagian keempat S_{11}mengasilkan M_4 dan M_4^T.
6. Susun elemen $L_1, L_2, L_3, L_4, P_1, P_2, P_3, P_4, M_1, M_2, M_3, M_4, M_1^T, M_2^T, M_3^T$ dan M_4^T sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ P_3 & P_4 & P_1 & P_2 \\ M_1 & M_2 & M_1^T & M_2^T \\ M_4 & M_3 & M_4^T & M_3^T \end{bmatrix}$$ yang merupakan pelabelan pada graf K_m, dimana $m \equiv 4 \bmod 8$.

Dalam kasus ini pelabelan graf disebut sebagai pelabelan total titik ajaib jika nilai konstanta ajaibnya adalah $\frac{32n^3+13n^2+n}{2}$

Bukti:

Pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* K_m, dimana *m* adalah bilangan genap dengan dengan $n = {}^1/_4$N yang memiliki susunan pelabelan $\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ P_3 & P_4 & P_1 & P_2 \\ M_1 & M_2 & M_1^T & M_2^T \\ M_4 & M_3 & M_4^T & M_3^T \end{bmatrix}$

Sebagaimana dengan kasus m =2 mod 4, maka konstanta ajaib pada kasus ini adalah hasil penjumlahan dalam setiap elemen dalam kolom tabel pelabelan. Dengan demikian dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} k &= 2\left(\frac{n^3+3n}{4}\right) + \frac{(n-3)n}{2} + 7\left(\frac{1}{2}n(n^2-1)\right) + (2n-4)n + 9\left(\frac{1}{2}n(n^2-1)\right) \\ &\quad + (2n-4)n + 14\left(\frac{1}{2}n(n^2-1)\right) + \frac{n(n^2+4n-13)}{2} \\ &= \frac{32n^3+13n^2+n}{2} \end{aligned}$$

Contoh :

Sebagai ilustrasi diberikan cara pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_{12} dengan $n = m/4$,maka n adalah bilangan ganjil 3. Dari contoh sebelumnya diketahui L pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_3 sebagai berikut

3	4		2
2	3	5	
1		1	6
i/j	*1*	*2*	*3*

3	4	3	2
2	3	5	1
1	2	1	6
i/j	*1*	*2*	*3*

Gambar 9 Hasil tabel pelabelan total titik ajaib K_3

 ISBN 979-26-0255-0

Dengan memindahkan elemen diagonal ke baris pertama ,maka diperoleh

Label titik	4	5	6
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 10 Tabel pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_3

Persegi ajaib P dengan orde 3 dengan menggunakan metode 4 diketahui sebagai berikut.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gambar 11 Persegi ajaib orde 3

Dari L, L_1 dibentuk dengan menggunakan S_1 dan S_4 pada tabel L, dengan $S_1 = \{1,2,3\}$ dan $S_4 = \{13,14,15\}$. Di dapatkan tabel L_1 dibawah

Label titik	13	14	15
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 12 Tabel L_1

L_2 dibentuk dengan menggunakan S_2 dan S_3 pada tabel L, dengan $S_2 = \{4,5,6\}$ dan $S_3 = \{7,8,9\}$. Di dapatkan tabel L_2 dibawah

Label titik	7	8	9
Label sisi	6	6	5
	5	4	4

Gambar 13 Tabel L_2

Sebagaimana dengan L_1 dan L_2 , L_3 dibentuk dengan menggunakan S_6 dan S_9, dengan $S_6 = \{22, 23, 24\}$ dan $S_9 = \{34, 35, 36\}$ sehingga didapatkan tabel L_3 sebagai berikut,

Label titik	34	35	36
Label sisi	24	24	23
	23	22	22

Gambar 14 Tabel L_3

Sedangkan L_4 dibentuk dengan menggunakan S_7 dan S_8, dengan $S_7 = \{25, 26, 27\}$ dan $S_8 = \{28, 29, 30\}$ sehingga didapatkan tabel L_4 sebagai berikut,

Label titik	28	29	30
Label sisi	27	27	26
	26	25	25

Gambar 15 Tabel L_4

Dengan P persegi ajaib orde 3 diatas dan diketahui $S_5 = \{10,11,12,16,17,18,19,20,21\}$ akan dibentuk label P_1 dan P_2. Label P_1 dibentuk dengan mengganti elemen tabel P dengan S_5 dan P_2 merupakan transpose tabel P_1

16	21	11
12	17	19
20	10	18

16	12	20
21	17	10
11	19	18

Gambar 16 Tabel P_1 kiri dan P_2 kanan

Serupa dengan pelabelan pada P_1 dan P_2, Label P_3 dibentuk dengan mengganti elemen tabel P dengan S_{10} dan P_4 merupakan transpose tabel P_3 dimana $S_{10} = \{31, 32, 33, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$.

37	42	32
33	38	40
41	31	39

37	33	41
42	38	31
32	40	39

Gambar 17 Tabel P_3 kiri dan P_4 kanan

Untuk selanjutnya dengan membagi S_{11} menjadi 4 bagian, ganti elemen persegi ajaib orde n dengan elemen-elemen yang ada dalam S_{11} dan lakukan transpose terhadap hasil yang diperoleh, yaitu sebagai berikut:

1. Bagian pertama S_{11} mengasilkan M_1 dan M_1^T
2. Bagian kedua S_{11} mengasilkan M_2 dan M_2^T
3. Bagian ketiga S_{11} mengasilkan M_3 dan M_3^T
4. Bagian keempat S_{11}mengasilkan M_4 dan M_4^T

Dengan $S_{11} = \{43, 44, 45, 46, \dots, 78\}$ maka diperoleh M_1, M_2, M_3, M_4, M_1^T, M_2^T, M_3^T dan M_4^T sebagai berikut

46	51	44
45	47	49
50	43	48

46	45	50
51	47	43
44	49	48

Gambar 18 Tabel M_1 dikiri dan M_1^T di kanan

55	60	53
54	56	58
59	52	57

55	54	59
60	56	52
53	58	57

Gambar 19 Tabel M_2 dikiri dan M_2^T di kanan

64	69	62
63	65	67
68	61	66

64	63	68
69	65	61
62	67	66

Gambar 20 Tabel M_3 dikiri dan M_3^T di kanan

73	78	71
72	74	76
77	70	75

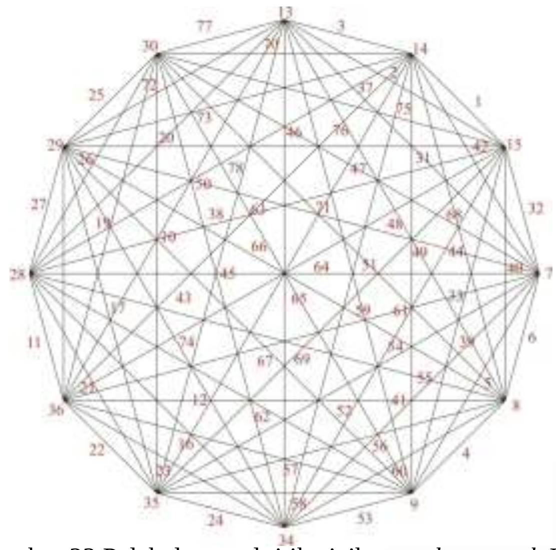
73	72	77
78	74	70
71	76	75

Gambar 21 Tabel M_4 dikiri dan M_4^T di kanan

Dengan demikian maka akan diperoleh pelabelan pada *complete graph* K_{12} sebagai berikut.

13	14	15	7	8	9	34	35	36	28	29	30
3	3	2	6	6	5	24	24	23	27	27	26
2	1	1	5	4	4	23	22	22	26	25	25
37	42	32	37	33	41	16	21	11	16	12	20
33	38	40	42	38	31	12	17	19	21	17	10
41	31	39	32	40	39	20	10	18	11	19	18
46	51	44	55	60	53	46	45	50	55	54	59
45	47	49	54	56	58	51	47	43	60	56	52
50	43	48	59	52	57	44	49	48	53	58	57
73	78	71	64	69	62	73	72	77	64	63	68
72	74	76	63	65	67	78	74	70	69	65	61
77	70	75	68	61	66	71	76	75	62	67	66

Gambar 22 Tabel pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_{12}



Gambar 23 Pelabelan total titik ajaib *complete graph* K_{12}

4. PENUTUP

Algoritma pelabelan total titik ajaib untuk *compete graph* K_n, untuk n bilangan genap disusun berdasarkan disusun berdasarkan pelabelan pada *complete graph* K_n, dan pelabelan *bipartite compete graph* $K_{n,n}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abussakir, 3 November 2008, *Graph Labeling*, Abussakir's Blog. http://abussakir.wordpress.com/

[2]. Gallian, J.A. "A Dynamic Survey of Graph Labeling". *The Electronic Journal of Combinatorics 15* (2008). Minnesota. United State Of America.

[3]. Harju, Tero. 2007. *Lecture Notes On Graph Theory*, Finland: Department of mathematics University Of Turki.

[4]. Hendry Dext, 3 Januari 2010, *Mengenal Magic Square*, Everything About Math Blog. http://hendrydext.blogspot.com/

[5]. Irawati Novi, Heri Robertus, *Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph* K_n *dengan n Ganjil*, Jurnal Matematika.

[6]. Lipschutz, Seymour and Lipson, Marc lars. 1992. " *2000 Solved Problem in Discrete Mathematic*". McGraw Hill, Inc. Singapore.

[7]. McDougall, Miller, Slamin, and Wallis, 2002. *Vertex Magic Total Labeling of Graphs*, Util. Math., 61(2002) 3-21.

[8]. Robin J. Wilson and John J. Watkins. 1990. *Graph An Introductory Approach*. John Wiley & Sons, Inc. New York .

[9]. Slamin et al. "Vertex-Magic Total Labelings of Disconnected Graphs"*: Journal of Prime Research in Mathematics* , Vol. 2(2006), 147-156.

[10]. Stinson, Robert. 1992. *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys.* John Wiley & Sons, Inc. New York .