PENERAPAN METODE NUMERIK PADA PERAMALAN UNTUK MENGHITUNG KOOEFISIEN-KOEFISIEN PADA GARIS REGRESI LINIER BERGANDA

Yuniarsi Rahayu, S.Si, M.Kom
Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Ilmu Komputer
Universitas Dian Nuswantoro
Jl. Nakula I No. 5-11, Semarang
Email : yuniarsi_r@dosen.dinus.ac.id

ABSTRAK

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Salah satu yang dipakai untuk menyelesaikan permasalahan matematika adalah Metode Numerik. Metode Numerik merupakan metode yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan (tambah, kurang, kali dan bagi). Komputer berperan dalam perkembangan bidang metode numerik. Dalam makalah ini akan membahas tentang salah satu penerapan dalam metode numerik, yaitu pada masalah penerapan pada peramalan untuk menghitung koefisien-koefisien pada garis regresi linier berganda dengan diberikan suatu kasus berikut analisisnya. Pembahasan kasus regresi linier berganda untuk satu perubah terikat dan 3 perubah bebas. Penggunaan metode dimaksudkan untuk memberi solusi dalam menghitung kooefisien-koefisien regresi linier berganda. Beberapa alternatif metode yang ada dipakai untuk menghitung koefisien- koefisien persamaan regresi linier berganda adalah metode cramer, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan. Permasalahan akan dibentuk menjadi model matematika untuk selanjutnya adalah diformulasikan secara numerik dengan alternatif-alternatif metode tersebut. Model matematika yang dihasilkan adalah model persamaan linier dengan 4 variabel sehingga mendapatkan persamaan regresi linier berganda. Pendekatan Last Square method/ metode kuadrat terkecil dipakai sebagai pengukur kesalahan-kesalahan dari setiap perkiraan. Perhitungan dengan alternatif ke-3 metode tersebut menggunakan alat bantu Matlab (matrix laboratory) yang memungkinkan untuk menangani kalkulasi matematis dengan cara mudah.

Kata Kunci : Metode Numerik, Regresi Linier Berganda , Matriks

1. PENDAHULUAN

Seiring perkembangan teknologi yang begitu pesat, banyak persoalan yang melibatkan model matematika dari berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi atau persoalan rekayasa (enginnering). Komputer berperan besar dalam perkembangan bidang metode numerik. Penggunaan komputer dalam metode numerik antara lain untuk memprogram. Langkah-langkah metode numerik diformulasikan menjadi program komputer. Metode numerik merupakan alat bantu pemecahan masalah matematika yang sangat ampuh. Metode numerik menyediakan sarana untuk memperkuat kembali pemahaman matematika. Tahapan memecahkan persoalan secara numerik yaitu pemodelan, penyederhanaan model, formulasi numerik, pemrograman, operasional, dan evaluasi.

Salah satu pemanfaatan numerik yang dibahas disini adalah dalam peramalan untuk menghitung koefisien – koefisien pada regresi linier berganda. Dalam penyelesaian untuk menentukan koefisien-koefisien pada regresi linier berganda akan digunakan beberapa pendekatan metode numerik, yaitu Metode Cramer, Metode Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Matriks Balikan.

Dalam makalah ini, penggunakan regresi linier berganda dengan 1 perubah terikat Y dan 3 perubah bebas X_{1i} dan X_{2i} , $X_{3i.}$ Pendekatan Last Square method/ metode kuadrat terkecil dipakai sebagai pengukur kesalahan-kesalahan dari setiap perkiraan. Penggunaan matlab digunakan untuk menghitung langkah demi langkah dalam perhitungan untuk menentukan koefisien-koefisien regresi linier berganda dengan menggunakan metode Metode Cramer, Metode Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Matriks Balikan.

2. PEMBAHASAN

2.1 Regresi Linier Berganda

Analisis regresi linier berganda merupakan pengembangan dari analisis regresi linier sederhana. Kegunaannya yaitu untuk meramalkan nilai variabel terikat (Y) apabila variabel bebasnya (X) dua atau lebih. Analisis regresi linier berganda adalah alat untuk meramalkan nilai pengaruh dua variabel bebas atau lebih terhadap satu variabel terikat (untuk membuktikan ada tidaknya hubungan fungsional atau hubungan kausal antara dua atau lebih variabel bebas X_1, X_2, …., X_i terhadap suatu variabel terikat Y. Variabel pertama disebut juga sebagai variabel tergantung dan variabel kedua disebut juga sebagai variabel bebas. Jika variabel bebas lebih dari satu, maka analisis regresi disebut regresi linear berganda. Disebut berganda karena pengaruh beberapa variabel bebas akan dikenakan kepada variabel tergantung.

Untuk regresi linier berganda dengan tiga variabel bebas :

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \qquad (1)$$

Penyelesaian empat persamaan dengan empat anu yang berbentuk :

$$\sum Y_i = a_0 n + a_1 \sum X_{1i} + a_2 \sum X_{2i} + a_3 \sum X_{3i} \qquad (2)$$
$$\sum Y_i X_{1i} = a_0 \sum X_{1i} + a_1 \sum X^2_{1i} + a_2 \sum X_{1i} X_{2i} + a_3 \sum X_{1i} X_{3i} \qquad (3)$$
$$\sum Y_i X_{2i} = a_0 \sum X_{2i} + a_1 \sum X_{1i} X_{2i} + a_2 \sum X^2_{2i} + a_3 \sum X_{2i} X_{3i} \qquad (4)$$
$$\sum Y_i X_{3i} = a_0 \sum X_{3i} + a_1 \sum X_{1i} X_{3i} + a_2 \sum X_{2i} X_{3i} + a_3 \sum X^2_{3i} \qquad (5)$$

2.2 Persamaan Linier

Dipandang m buah persamaan-persamaan linier dengan n anu :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

a_i dan b adalah skalar, di mana a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta dari persamaan.
x_i : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut anu (undeterminants, unknows atau variables)

Dengan perkalian matriks, persamaan-persamaan tersebut bisa ditulis sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$A \quad X \quad = \quad B$$

Diambil suatu kasus dengan 10 data, antara lain X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} dan Y_i. Hasil penyajian datanya adalah sebagai berikut:

Tabel 1 : Data yang Belum Diolah

NO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	33	36	32	36	36	31	38	39	33	37
X_{1i}	34	32	31	37	36	32	40	40	40	37
X_{2i}	17	18	15	17	17	24	12	18	14	17
X_{3i}	9	15	9	9	9	9	12	10	9	7

Berdasar data pada tabel 1 , sehingga diperoleh data seperti ditunjukkan pada tabel 2 sebagai berikut :

Tabel 2 : Penyajian Data yang Diolah

No	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	$X_{1i}Y_i$	$X_{2i}Y_i$	$Y_i X_{3i}$	$X_{1i}X_{2i}$	$X_{1i}X_{3i}$	$X_{2i}X_{3i}$	X^2_{1i}	X^2_{2i}	X^2_{3i}
1	33	34	17	9	1122	561	297	578	306	153	1156	289	81
2	36	32	18	15	1152	648	540	576	480	270	1024	324	225
3	32	31	15	9	992	480	288	465	279	135	961	225	81
4	36	37	17	9	1332	612	324	629	333	153	1369	289	81
5	36	36	17	9	1296	612	324	612	324	153	1296	289	81
6	31	32	24	9	992	744	279	768	288	216	1024	576	81
7	38	40	12	12	1520	456	456	480	480	144	1600	144	144
8	39	40	18	10	1560	702	390	720	400	180	1600	324	100
9	33	40	14	9	1320	462	297	560	360	126	1600	196	81
10	37	37	17	7	1369	629	259	629	259	119	1369	289	49
$\sum$	**351**	**359**	**169**	**98**	**12655**	**5906**	**3454**	**6017**	**3509**	**1649**	**12999**	**2945**	**1004**

Dari tabel 2, kemudian diformulasikan menjadi model matematika dalam bentuk persamaan linier (2), (3), (4) dan (5) sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
10\ a_0 &+ 359\ a_1 + 169\ a_2 + 98\ a_3 = 351 \\
359\ a_0 &+ 12999\ a_1 + 6017 a_2 + 3509\ a_3 = 12655 \\
169\ a_0 &+ 6017\ a_1 + 2945\ a_2 + 1649\ a_3 = 5906 \\
98\ a_0 &+ 3509\ a_1 + 1649\ a_2 + 1004\ a_3 = 3454
\end{aligned}
$$

Atau dalam persamaan konsep matriks berdasarkan (6) , persamaan tersebut ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$
\begin{pmatrix} 10 & 359 & 169 & 98 \\ 359 & 12999 & 6017 & 3509 \\ 169 & 6017 & 2945 & 1649 \\ 98 & 3509 & 1649 & 1004 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 351 \\ 12655 \\ 5906 \\ 3454 \end{pmatrix}
$$

 ISBN 979-26-0255-0

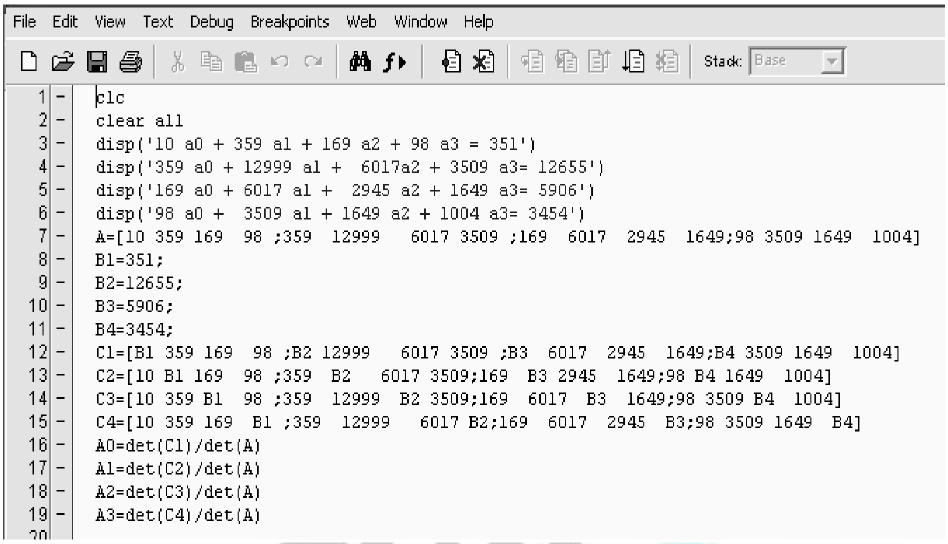
2.3 Metode Cramer

Solusi dari persamaan (6), menurut aturan Cramer adalah sebagai berikut :

$$X_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad ; \text{dengan syarat } |A| \neq 0$$

A_i = matriks A dengan kolom ke i nya diganti dengan nilai-nilai dari matriks B dan kolom yang lain tetap.

Perhitungan dengan Metode Cramer terlihat pada gambar 1 sebagai berikut :



Gambar 1 : Perhitungan dengan Metode Cramer

Penjelasan pada gambar 1 adalah sebagai berikut :

Baris 1-2	:	Membersihkan layar
Baris 3-6	:	Menunjukkan program pertama kali akan menampilkan bentuk model persamaan linier seperti pada rumus (2),(3),(4) dan (5).
Baris 7	:	Memasukkan matriks A.
Baris 8-11	:	Menentukan Matriks C_1, C_2, C_3 dan C_4 sebagai matriks pembilang, yang akan dipakai untuk menghitung determinan pada baris 16-19
Baris 16-19	:	A_0, A_1, A_2, A_3 merupakan hasil perhitungan untuk mencari koefisien-koefisien regresi linier berganda a_0, a_1, a_2, a_3.

Pada gambar 1, jika program dijalankan (dengan menekan F5) maka akhirnya akan mendapatkan harga a_0= 9.9958; a_1=0.5502; a_2=0.0552; a_3= 0.4609 sehingga persamaan regresi linier berganda dengan menggunakan metode cramer adalah sebagai berikut $Y=9.9958+ 0.5502X_1 + 0.0552\,X_2 + 0.4609\,X_3$

2.4 Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode ini diberi nama Gauss-Jordan untuk menghormati Carl Friedrich Gauss dan Wilhelm Jordan. Metode ini sebenarnya adalah modifikasi dari metode eliminasi Gauss, yang dijelaskan oleh Jordan di tahun 1887.

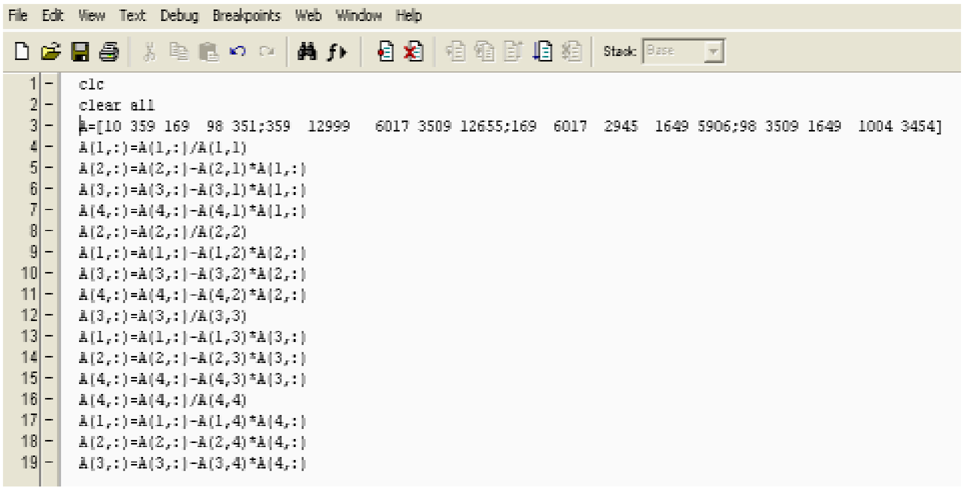
Dalam eliminasi Gauss-Jordan, matriks A dieliminasi menjadi matriks identitas I. Solusinya langsung diperoleh dari vektor kolom b hasil proses eliminasi.

$$\mathbf{Ax = b \rightarrow Ix = b'}$$

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gauss-Jordan ditulis sebagai :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 \,.. & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 \,.. & 0 & b_2' \\ .. & .. & \ldots. & & \\ .. & .. & \ldots. & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_n' \end{array}\right) \qquad (7)$$

Perhitungan dengan Metode Eliminuss-Jordan terlihat pada gambar 2 sebagai berikut :




```
1  - clc
2  - clear all
3  - A=[10 359 169  98 351;359  12999   6017 3509 12655;169  6017  2945  1649 5906;98 3509 1649  1004 3454]
4  - A(1,:)=A(1,:)/A(1,1)
5  - A(2,:)=A(2,:)-A(2,1)*A(1,:)
6  - A(3,:)=A(3,:)-A(3,1)*A(1,:)
7  - A(4,:)=A(4,:)-A(4,1)*A(1,:)
8  - A(2,:)=A(2,:)/A(2,2)
9  - A(1,:)=A(1,:)-A(1,2)*A(2,:)
10 - A(3,:)=A(3,:)-A(3,2)*A(2,:)
11 - A(4,:)=A(4,:)-A(4,2)*A(2,:)
12 - A(3,:)=A(3,:)/A(3,3)
13 - A(1,:)=A(1,:)-A(1,3)*A(3,:)
14 - A(2,:)=A(2,:)-A(2,3)*A(3,:)
15 - A(4,:)=A(4,:)-A(4,3)*A(3,:)
16 - A(4,:)=A(4,:)/A(4,4)
17 - A(1,:)=A(1,:)-A(1,4)*A(4,:)
18 - A(2,:)=A(2,:)-A(2,4)*A(4,:)
19 - A(3,:)=A(3,:)-A(3,4)*A(4,:)
```

Gambar 2. Perhitungan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Penjelasan pada gambar 2 adalah sebagai berikut :

Baris 1-2 : Membersihkan layar
Baris 3 : Memasukkan matriks A.
Baris 4 -19 : Perhitungan elementer baris untuk pembentuk matriks A menjadi matriks identitas I

Jadi program pada gambar 2 memperlihatkan tahap-tahap dalam proses menentukan pembentukan matriks seperti pada rumus (7). Program gambar (2) dijalankan (dengan menekan F5) maka akhirnya akan mendapatkan harga a_0= 9.9958; a_1=0.5502; a_2=0.0552; a_3= 0.4609 sehingga persamaan regresi linier berganda dengan menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut $Y=9.9958+ 0.5502X_1 + 0.0552\ X_2 + 0.4609\ X_3$

2.5 Metode Matriks Balikan

Misal A^{-1} adalah matriks balikan dari A. Hasil kali A dengan A^{-1} menghasilkan matriks identitas I,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \ldots\ldots (8)$$

Bila matriks A dikalikan dengan I akan menghasilkan matriks A sendiri,

$$AI = IA = A \quad \ldots\ldots (9)$$

 ISBN 979-26-0255-0

Berdasarkan 2 kesamaan (8) dan (9), sistem persamaan linier AX=b dapat diselesaikan sebagai berikut :

$$A\,X = b \rightarrow A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,b \rightarrow I\,X = A^{-1}b \rightarrow X = A^{-1}b \qquad (10)$$

Jadi penyelesaian sistem persamaan linier AX=b adalah $X=A^{-1}b$ dengan syarat A^{-1} ada.

Perhitungan dengan Metode Matriks Balikan terlihat pada gambar 3 sebagai berikut :

```
1   clc
2   clear all
3   disp('10 a0 + 359 a1 + 169 a2 + 98 a3 = 351')
4   disp('359 a0 + 12999 a1 +  6017a2 + 3509 a3= 12655')
5   disp('169 a0 + 6017 a1 +  2945 a2 + 1649 a3= 5906')
6   disp('98 a0 +  3509 a1 + 1649 a2 + 1004 a3= 3454')
7   A=[10 359 169  98 1 0 0 0;359  12999   6017 3509 0 1 0 0;169  6017  2945  1649 0 0 1 0;98 3509 1649  1004 0 0 0 1]
8   A(1,:)=A(1,:)/A(1,1)
9   A(2,:)=A(2,:)-A(2,1)*A(1,:)
10  A(3,:)=A(3,:)-A(3,1)*A(1,:)
11  A(4,:)=A(4,:)-A(4,1)*A(1,:)
12  A(2,:)=A(2,:)/A(2,2)
13  A(1,:)=A(1,:)-A(1,2)*A(2,:)
14  A(3,:)=A(3,:)-A(3,2)*A(2,:)
15  A(4,:)=A(4,:)-A(4,2)*A(2,:)
16  A(3,:)=A(3,:)/A(3,3)
17  A(1,:)=A(1,:)-A(1,3)*A(3,:)
18  A(2,:)=A(2,:)-A(2,3)*A(3,:)
19  A(4,:)=A(4,:)-A(4,3)*A(3,:)
20  A(4,:)=A(4,:)/A(4,4)
21  A(1,:)=A(1,:)-A(1,4)*A(4,:)
22  A(2,:)=A(2,:)-A(2,4)*A(4,:)
23  A(3,:)=A(3,:)-A(3,4)*A(4,:)
24  b=[A(1,5) A(1,6) A(1,7) A(1,8);A(2,5) A(2,6) A(2,7) A(2,8);A(3,5) A(3,6) A(3,7)  A(3,8);A(4,5) A(4,6) A(4,7) A(4,8)]
25  c=[351;12655;5906;3454]
26  d=b*c
```

Gambar 3. Perhitungan Metode Matriks Balikan

Penjelasan pada gambar 3 adalah sebagai berikut :

Baris 1-2	:	Membersihkan layar
Baris 3-6	:	Menunjukkan program pertama kali akan menampilkan bentuk model persamaan linier seperti pada rumus (2), (3), (4) dan (5).
Baris 7	:	Memasukkan matriks A.
Baris 8-23	:	Perhitungan elementer baris untuk pembentukan matriks A menjadi matriks identitas I dan pembentukan matriks A^{-1}
Baris 24	:	Pengambilan matriks A^{-1} dari hasil operasi elementer baris hasil perhitungan pada baris 23
Baris 25	:	Memasukkan nilai kanan dari persamaan
Baris 26	:	Menghitung koefisien a_0, a_1,a_2,a_3 yaitu dari baris 24 (A^{-1}) dikalikan baris 25 (b) seperti dalam rumus (10)

Program pada gambar 3 memperlihatkan tahap-tahap dalam proses menentukan pembentukan matriks seperti pada rumus (10). Dari gambar 3, maka jika program dijalankan (dengan menekan F5) maka akhirnya akan mendapatkan harga a_0= 9.9958; a_1=0.5502; a_2=0.0552; a_3= 0.4609 sehingga persamaan regresi linier berganda dengan menggunakan Metode Matriks Balikan adalah sebagai berikut $Y=9.9958+ 0.5502X_1 + 0.0552\,X_2 + 0.4609\,X_3$

Tabel 3 : Perhitungan Error Model Matematika terhadap nilai observasi

No	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	$\hat{Y}$	$e = Y - \hat{Y}$	e^2
1	33	34	17	9	33.7891	-0.7891	0.6227
2	36	32	18	15	35.5093	0.4907	0.2408
3	32	31	15	9	32.0281	-0.0281	7.8961e-004
4	36	37	17	9	35.4397	0.5603	0.3139
5	36	36	17	9	34.8895	1.1105	1.2332
6	31	32	24	9	33.0751	-2.0751	4.3060
7	38	40	12	12	38.1970	-0.1970	0.0388
8	39	40	18	10	37.6064	1.3936	1.9421
9	33	40	14	9	36.9247	-3.9247	15.4033
10	37	37	17	7	34.5179	2.4821	6.1608
Jumlah							30.2624

Pada tabel 3 memperlihatkan perhitungan error model matematika terhadap observasi, serta diperoleh kesalahan baku adalah 2.0792. Hasil perhitungan koefisien-koefisien pada persamaan regresi linier berganda dengan menggunakan ke-3 metode adalah sama yaitu menghasilkan persamaan regresi berganda sebagai berikut $Y = 9.9958 + 0.5502X_1 + 0.0552\, X_2 + 0.4609\, X_3$.

3. KESIMPULAN

Berdasarkan dari pembahasan dan analisis data yang sudah diuraikan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

a) Permasalahan yang dibahas ini, adalah suatu kasus dengan satu perubah terikat (Y) dan tiga perubah X_{1i}, X_{2i},X_{3i}.
b) Penggunaan Metode Numerik dalam menghitung koefisien-koefisien pada regresi linier berganda.
c) Metode yang digunakan di sini adalah Metode Cramer, Metode Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Matriks Balikan yang menghasilkan 4 persamaan linier dengan 4 variabel.
d) Penggunaan Matlab dalam perhitungan dengan Metode Cramer, Metode Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Matriks Balikan dalam menghitung koefisien-koefisien pada regresi linier berganda.
e) Pada makalah ini hasil perhitungan koefisien-koefisien regresi linier berganda yang diperoleh dari penggunaan 3 metode tersebut adalah sama yaitu $a_0 = 9.9958$; $a_1 = 0.5502$; $a_2 = 0.0552$; $a_3 = 0.4609$ sehingga persamaan regresi linier berganda adalah $Y = 9.9958 + 0.5502X_1 + 0.0552\, X_2 + 0.4609\, X_3$
f) Kesalahan baku (standard error) regresi adalah 2.0792

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Amrinsyah Nasution & Hasballah Zakaria, Metode Numerik dalam Ilmu Rekayasa Sipil", ITB Bandung, 2001
[2] Agus Setiawan, ST, MT, Pengantar Metode Numerik, 2006. Penerbit Andi, Yogyakarta
[3] Ardi Pujianto, Komputasi Numerik dengan Matlab, Graha Ilmu, 2007
[4] Kartono, Drs, Msi, "Aljabar Linier, Vektor, dan Esplorasinya dengan Maple", Penerbit Graha Ilmu, 2002
[5] Kasiman Peranginangin, 2006, "Pengenalan Matlab", CV. Andi Offset, Yogyakarta
[6] Renaldi Munir, "Metode Numerik", Informatika Bandung,2006
[7] Sudjana, Prof.Dr,M.A.,M.Sc., Metode Statistika, Tarsito Bandung, 1996.
[8] Supranto J, M. A, "Metode Ramalan Kuantitatif untuk Perencanaan Ekonomi dan Bisnis, Penerbit Rineka Cipta